Leçon 148 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

1 Dimension d'un espace vectoriel (Grifone)

1.1 Base et notion de dimension

- Définition famille génératrice + exemple
- Définition dimension finie
- Définition famille libre + exemple
- Florilège de propriété sur les familles libres/génératrices
- Sous espace-vectoriel d'un dimension finie est de dimension finie
- Définition base + exemple
- Théorème base incomplète
- Corollaire sur l'existence de base en dimension finie

1.2 Théorèmes importants

- Cardinal maximal d'une famille libre et minimal d'une famille génératrice
- Unicité du cardinal des bases + définition de la dimension
- Des dimensions classiques
- Dimension d'un produit cartésien
- Génératrice ou libre + cardinal de la dimension, alors base
- Définition supplémentaire + existence/propriété (toujours même dimension/équivalence)
- Formule de Grassmann

2 Applications linéaires (Grifone)

2.1 Rang

- Définition du rang
- Deux ev de dim finie sont isomorphes ssi ils ont la même dimension
- Théorème du rang
- Si E et E' ont la même dim, f injective⇒surjective...
- Contre exemple de l'équivalence en dimension infinie

2.2 Point de vue matriciel

- On peut représenter une application linéaire par une matrice + exemple
- $\dim(\mathcal{M}_{p,q}) = pq$
- Si $M = (c_1 ... c_n)$, rg$(M) = \dim((c_1, \overset{\rightarrow}{\ldots}, c_n))$ + égalité du rang de f et Mat$f$ + rg(A) = rg$({}^tA)$ + invariance du rang par changement de base
- Le rang est la taille du plus grand mineur non nul + Applications
- Action de Steinitz ou un mot le pivot de Gauss en n^3 pour trouver le rang
-

3 Utilisation de la dimension finie

3.1 Algèbre linéaire

- Tout application linéaire admet un unique polynôme annulateur unitaire minimal + critère de trigonalisation
- Exemple dans $\mathbb{C}$ car algébriquement clos
- Dév 1 : Réduction des endomorphismes normaux dans un espace eucldien

3.2 En topologie

- Équivalence des normes
- Fermés+bornés $\Rightarrow$ compact, continuité des applications linéaires
- Un autre truc, genre Riesz ou dire que tous les sous espace-vectoriels sont fermés

3.3 Polynômes et corps finis

- Base téléscopique
- Corps de rupture
- Existence des corps finis
- Dév 2 : Berlekamp